MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 3:

1. Je dáno zobrazení $f: A \to B$ a $M, M_i \subseteq A$, $N, N_i \subseteq B$, $(i=1,2)$;

   označme $f(M) = \{b \in B; \exists a \in A: f(a) = b\}$ a $f^{-1}(N) = \{a \in A; f(a) \in N\}$.

   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení a pokud některé neplatí, pokuste se charakterizovat zobrazení, pro která tvrzení platí:

   a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$;

   b) $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$;

   c) $\forall M \subseteq A: f^{-1}(f(M)) = M$;

   d) $\forall N \subseteq B: f(f^{-1}(N)) = N$.

2. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin (a vaše tvrzení ověřte) :

   a) $M_1 = \left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}; n \in N\right\}$; b) $M_2 = \left\{\dfrac{p}{p+q}; p, q \in N\right\}$; c) $M_1 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in N\right\}$.

3. A dobrovolně navíc:

   Ukažte užitím matematické indukce, že pro všechna přirozená n platí (e je Eulerovo číslo) :

   $$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

   (Návod : pro horní odhad lze užít tzv. AG nerovnost

   $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots\ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots\ldots + x_n)$ (n přirozené, $x_1, \ldots\ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla)

   a dále, že platí pro n přirozené odhad $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$.)